PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- XVI edizione

ISTRUZIONI GENERALI PER GLI INSEGNANTI

1 Svolgimento della gara del 17 novembre 2010

- La prova deve svolgersi nella mattinata del giorno mercoledì 17 novembre 2010, possibilmente alla stessa ora in tutto l'istituto. **Tuttavia, in considerazione del fatto che sono previste manifestazioni studentesche ed è stato indetto uno sciopero degli insegnanti per la mattinata del 17 novembre, nel caso in cui sia impossibile far effettuare agli studenti la prova nel corso della mattinata, è ammesso lo svolgimento nel pomeriggio del 17 novembre (possibilmente nelle prime ore del pomeriggio). Nel caso in cui nessuna delle due precedenti opzioni (mattina o pomeriggio del 17) risulti praticabile a causa dello sciopero e delle manifestazioni studentesche, si ammette la possibilità di far svolgere la gara la mattina del 18 novembre. In questo caso il responsabile di Istituto è pregato di darne comunicazione all'U.M.I. per posta elettronica.**
- **Il tempo totale a disposizione degli studenti è fissato in due ore (120 min.), sia per la gara del biennio che per quella del triennio.**
- Non è ammesso l'uso di calcolatrici, tavole, testi o appunti personali; agli studenti è concesso solo l'uso di fogli di brutta copia, che **non dovranno** essere consegnati.
- Le risposte riportate nella griglia iniziale del testo stampato saranno l'unico elemento di giudizio; ogni correzione o cancellatura nella griglia va considerata **risposta errata**.
- Si raccomanda di garantire la massima serietà delle prove, curando in particolare che il lavoro venga svolto autonomamente da ciascuno studente in un clima di serenità e di impegno.

2 Valutazione degli elaborati

- Fatta salva la libertà di ciascun insegnante di utilizzare, eventualmente per fini scolastici, gli elaborati delle proprie classi con il criterio di valutazione che ritiene più appropriato, si dovrà assegnare **agli effetti della gara** il seguente punteggio per ogni quesito:
  – risposta esatta: 5 punti
  – risposta errata: 0 punti
  – nessuna risposta (casella bianca): 1 punto.
- Per ciascuna classe partecipante alla prova si chiede la compilazione di una scheda statistica di classe, da consegnare al referente di istituto (o al Dirigente Scolastico in persona) che provvederà ad aggregare i dati delle singole classi per formulare un'unica scheda statistica di istituto, da inserire nell'area del sito delle olimpiadi appositamente dedicata a ciascun istituto partecipante. Uno schema della scheda statistica di classe verrà inviato ai referenti di istituto nei giorni successivi allo svolgimento della gara, assieme alle soluzioni.
- Auspichiamo che il livello di difficoltà della gara sia adatto agli studenti coinvolti. Ricordiamo tuttavia che la soluzione di tutti i problemi deve ritenersi assolutamente eccezionale, in quanto il loro numero è dovuto al desiderio di offrire un ampio spettro di quesiti in modo che ciascuno possa cimentarsi con quelli a lui più congeniali. La soluzione da parte degli studenti anche soltanto di alcuni problemi, magari inusuali per loro, deve considerarsi dunque un successo in ogni caso.

3 Selezione per la prova di febbraio

- La selezione finale per la partecipazione alla gara di secondo livello (gara provinciale) è demandata per ciascuna provincia ai rispettivi responsabili distrettuali.
- La gara di secondo livello si svolgerà nel mese di febbraio 2011 e sarà finalizzata alla selezione dei partecipanti alla Gara Nazionale e agli stage intensivi di preparazione alle gare stesse. Ricordiamo che la partecipazione degli studenti

del biennio alle gare è di fondamentale importanza, pertanto si raccomanda di favorire la massima partecipazione di studenti del biennio e di segnalarne un congruo numero, in vista delle iniziative a loro dedicate.

A questo fine riteniamo opportuno che una percentuale di **almeno il 35%** dei partecipanti alla gara di febbraio sia costituita da **alunni del biennio**.

- Poiché si ritiene ragionevole una partecipazione alla gara di secondo livello non superiore al 5% dei partecipanti ai Giochi di Archimede, invitiamo a segnalare al referente di istituto e, quindi, al responsabile distrettuale da 1 a 3 alunni per ogni classe con il relativo punteggio.
- Qualora si presentino situazioni particolari (ad esempio numerosi punteggi molto elevati, ovvero alunni dal rendimento scolastico particolarmente brillante autori di elaborati mediocri) queste potranno essere segnalate al responsabile distrettuale, che ne terrà debito conto.
- I moduli elettronici riepilogativi (biennio e triennio) dei risultati di ciascun istituto e le segnalazioni dei nominativi degli alunni per la gara di secondo livello dovranno essere compilati sull'area riservata del sito delle olimpiadi (utilizzando `userid` e `password` inviati con la lettera di invito a partecipare ai giochi) **entro il 20 dicembre 2010**. La Segreteria UMI (tel. 051243190, posta elettronica umi@dm.unibo.it) è a disposizione per collaborare con i Responsabili di Istituto che incontrino difficoltà a trasmettere i moduli.
- Si ricorda l'indirizzo del sito delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`. Si suggerisce agli studenti e ai docenti interessati di consultare il sito e in particolare i forum, dove si possono trovare informazioni, esercizi, soluzioni e dove vengono annunciate tempestivamente tutte le iniziative "olimpiche", come gli stage locali e nazionali, che sono spesso aperti ai volontari. Infine segnaliamo che sul sito web di Massimo Gobbino (il *preparatore* della nostra squadra nazionale) all'indirizzo `http://www2.ing.unipi.it/~d9199`, si possono trovare lezioni ed esercizi per la preparazione alle Olimpiadi, nella parte "Training olimpico".

Nel ringraziarvi per la collaborazione, auspichiamo uno svolgimento corretto e sereno dei giochi di Archimede.

La Commissione Nazionale per le Olimpiadi di Matematica

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

17 novembre 2010

1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

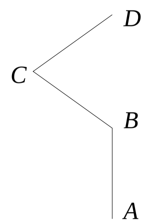
Nome ____________ *Cognome* ____________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Quanti lunedì possono esserci al massimo in 45 giorni consecutivi?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 9.

2) Emilio prende al buio dei calzini da una cesta in cui ci sono: 6 calzini neri, 14 calzini blu e 8 calzini verdi. Per essere sicuro che tra i calzini che ha preso ce ne siano due dello stesso colore, il numero minimo di calzini che deve prendere è:
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 9, **(D)** 15, **(E)** 21.

3) La figura a fianco rappresenta il tragitto fatto da Pluto per andare dalla sua cuccia, posta in A, al bar, posto in D. I tre segmenti AB, BC e CD sono lunghi 100 metri ciascuno. Se l'angolo $\widehat{ABC}$ (interno al triangolo ABC) è di 120° e l'angolo $\widehat{BCD}$ (interno al triangolo BCD) è di 60°, quanto dista in linea retta il bar dalla cuccia?



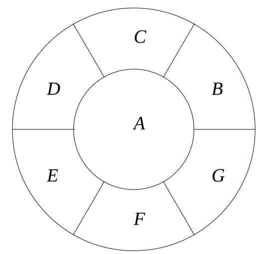
(A) 100 m, **(B)** $100\sqrt{3}$ m, **(C)** 200 m, **(D)** 330 m, **(E)** $200\sqrt{3}$ m.

4) Quale fra queste serie di disuguaglianze è corretta?
(A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, **(B)** $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$,
(C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, **(D)** $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$,
(E) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.

5) Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo e al primo petalo, e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** questa disposizione è impossibile: l'ultimo petalo si sovrappone necessariamente al primo.

6) a, b e c sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$, **(B)** almeno uno dei tre numeri è zero, **(C)** almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero, **(D)** a, b e c sono tutti maggiori o uguali a zero, **(E)** $a + b + c \geq 0$.

7) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in sette stati, uno centrale e gli altri sei intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?



(A) Nessuno, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.

8) Alberto cammina da A a B e poi (senza fermarsi in B) torna ad A; Barbara cammina da B ad A e poi (senza fermarsi in A) torna a B. Entrambi si muovono in linea retta, con velocità costante (ma le due velocità non sono necessariamente uguali). Partono nello stesso istante, e si incontrano una prima volta, all'andata, a 700 metri da B, e una seconda volta, mentre Alberto sta andando da B ad A e Barbara da A a B, a 400 metri da A. Quanto dista A da B?
(A) 900 metri, **(B)** 1100 metri, **(C)** 1700 metri, **(D)** 2000 metri, **(E)** non si può determinare.

9) Luca scrive sulla lavagna tutti i numeri pari consecutivi da 2 e 2010 (compresi). Poi Giovanni cancella tutti i numeri che sono multipli di tre. Quanti numeri rimangono?
(A) 670, **(B)** 710, **(C)** 840, **(D)** 905, **(E)** 1005.

10) Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie. In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero

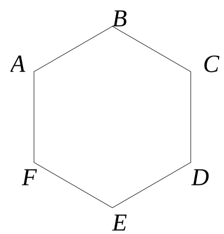
di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?
(A) 15%, **(B)** 21,5%, **(C)** 28%, **(D)** 37,5%, **(E)** 60%.

11) In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?
(A) $(5+\sqrt{3})$ cm, **(B)** $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm, **(C)** $(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm, **(D)** $(5+\sqrt{2})$ cm, **(E)** $(2+3\sqrt{3})$ cm.

12) Quanto vale la somma: $1+2+2+3+3+4+4+\ldots+35+35+36$?
(A) 990, **(B)** 1105, **(C)** 1295, **(D)** 1395, **(E)** 1505.

13) Scriviamo tutti i numeri naturali da 1 a 2010 (compresi) uno di seguito all'altro in modo da formare un nuovo numero naturale; quante cifre ha questo numero?
(A) 2010, **(B)** 3540, **(C)** 5225, **(D)** 6933, **(E)** 7253.

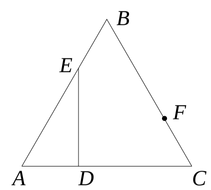
14) $ABCDEF$ è un esagono regolare di lato 1 cm. G è il punto di intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto vale l'area del triangolo ABG?
(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\text{cm}^2$, **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}\,\text{cm}^2$, **(C)** $\frac{9}{40}\,\text{cm}^2$, **(D)** $\frac{1+\sqrt{3}}{12}\,\text{cm}^2$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$.



15) Quante cifre ha il numero (112233445566778899)/11?
(A) 9, **(B)** 13, **(C)** 17, **(D)** 19, **(E)** 23.

16) Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre, tali che la cifra delle unità sia la somma della cifra delle decine e di quella delle centinaia?
(A) 315, **(B)** 495, **(C)** 540, **(D)** 720, **(E)** 900.

17) In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare a AC. Quanto misura l'area del triangolo DEF?
(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\text{m}^2$, **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m}^2$, **(C)** $3\sqrt{3}\,\text{m}^2$, **(D)** $\frac{3}{2}\,\text{m}^2$, **(E)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\text{m}^2$.



18) Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità. Anna afferma: "Il colpevole è un maschio!". Cecilia dice: "È stata Anna oppure è stato Enrico". Infine Enrico dice: "Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente". Chi ha commesso l'omicidio?
(A) Anna, **(B)** Bruno, **(C)** Cecilia, **(D)** Dario, **(E)** Enrico.

19) Quante coppie (x,y), formate da numeri interi strettamente maggiori di 1, sono tali che: $x^2+y=xy+1$?
(A) Nessuna, **(B)** una, **(C)** due, **(D)** tre, **(E)** più di quattro.

20) Ciro taglia un triangolo equilatero fatto di carta, di lato 20 cm, in alcuni pezzi che poi dispone sul suo tavolo in modo che non si sovrappongano e che formino un quadrato. Quanto è lungo il lato del quadrato?
(A) 20 cm, **(B)** $10\sqrt[4]{3}$ cm, **(C)** 15 cm, **(D)** $8\sqrt[4]{2}$ cm, **(E)** $10\sqrt{3}$ cm.

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2010

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ________________ *Cognome* ____________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quanti lunedì possono esserci al massimo in 45 giorni consecutivi?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 9.

2) Emilio prende al buio dei calzini da una cesta in cui ci sono: 6 calzini neri, 14 calzini blu e 8 calzini verdi. Per essere sicuro che tra i calzini che ha preso ce ne siano due dello stesso colore, il numero minimo di calzini che deve prendere è:
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 9, **(D)** 15, **(E)** 21.

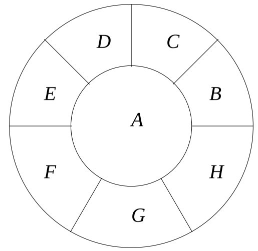
3) Quante cifre ha il quadrato di un numero naturale di 10 cifre?
(A) meno di 25, **(B)** 40, **(C)** 50, **(D)** 60, **(E)** almeno 100.

4) Quale fra queste serie di disuguaglianze è corretta?
(A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5}+\sqrt{3}$, **(B)** $\sqrt{5}+\sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$,
(C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$, **(D)** $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5}+\sqrt{3}$,
(E) $\sqrt{5}+\sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.

5) Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo e al primo petalo, e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** questa disposizione è impossibile: l'ultimo petalo si sovrappone necessariamente al primo.

6) a, b e c sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$, **(B)** almeno uno dei tre numeri è zero, **(C)** almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero, **(D)** a, b e c sono tutti maggiori o uguali a zero, **(E)** $a+b+c \geq 0$.

7) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in otto stati, uno centrale e sette intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?



(A) Nessuno, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.

8) Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie. In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?
(A) 15%, **(B)** 21,5%, **(C)** 28%, **(D)** 37,5%, **(E)** 60%.

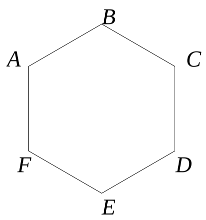
9) In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?
(A) $(5+\sqrt{3})$ cm, **(B)** $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm, **(C)** $(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm,
(D) $(5+\sqrt{2})$ cm, **(E)** $(2+3\sqrt{3})$ cm.

10) Quanto vale la somma: $1+2+2+3+3+4+4+\ldots+35+35+36$?
(A) 990, **(B)** 1105, **(C)** 1295, **(D)** 1395, **(E)** 1505.

11) La squadra dei matematici partecipa ad un campionato in cui ogni vittoria vale 3 punti, ogni pareggio 1 punto e ogni sconfitta 0 punti. Dopo le prime 13 partite la squadra ha 29 punti e ha perso tante partite quante ne ha pareggiate. Quante partite ha vinto finora?
(A) 4, **(B)** 6, **(C)** 8, **(D)** 9, **(E)** 11.

12) Per quanti valori distinti del numero naturale n l'equazione $3x^2+2nx+3=0$ ha due soluzioni reali distinte, e queste sono entrambe numeri interi?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 4, **(E)** più di 5.

13) $ABCDEF$ è un esagono regolare di lato 1 cm. G è il punto di intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto vale l'area del triangolo ABG?
(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}\,\mathrm{cm}^2$, **(C)** $\frac{9}{40}\,\mathrm{cm}^2$,
(D) $\frac{1+\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{cm}^2$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

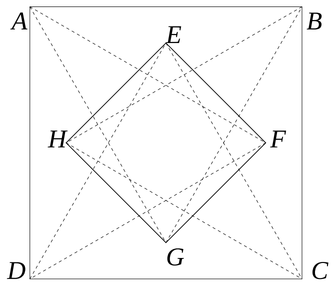


14) Quante cifre ha il numero (111222333444555666777888999)/111?
(A) 13, **(B)** 21, **(C)** 25, **(D)** 27, **(E)** 29.

15) Un atleta percorre 5 km in 16 minuti e 40 secondi. Durante il percorso aumenta progressivamente la sua velocità, in modo che ogni chilometro viene coperto in 5 secondi in meno del precedente. Quanto tempo impiega per percorrere l'ultimo chilometro?
(A) 2 minuti e 55 secondi, **(B)** 3 minuti, **(C)** 3 minuti e 5 secondi,
(D) 3 minuti e 10 secondi, **(E)** 3 minuti e 15 secondi.

16) Quante terne distinte (x, y, z), formate da numeri interi compresi tra 0 e 100 (estremi inclusi), soddisfano $(x-y)^2 + (y+z)^2 = (x+y)^2 + (y-z)^2$?
(A) $101 \cdot 201$, **(B)** 10^6, **(C)** 101^2, **(D)** 10^4, **(E)** $51 \cdot 301$.

17) Nella figura a fianco, il quadrato $ABCD$ ha lato 1 m e i triangoli: ABG, BCH, CDE e DAF sono equilateri. Quanto vale l'area di $EFGH$?
(A) $\frac{1}{6}\,\mathrm{m}^2$, **(B)** $\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$, **(C)** $(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2$,
(D) $(3\sqrt{3}-5)\,\mathrm{m}^2$, **(E)** $\frac{1}{3}\,\mathrm{m}^2$.



18) Quanti sono i quadrati perfetti di almeno tre cifre, minori o uguali di $2010 \cdot 2011$?
(A) 1890, **(B)** 1910, **(C)** 2001, **(D)** 2011, **(E)** 2110.

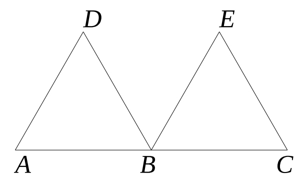
19) Il maggiore Tom è atterrato su un pianeta popolato da gatti viola, che dicono sempre la verità, e da gatti neri, che mentono sempre. Nel buio più completo incontra 5 gatti, che si rivolgono a lui nel modo seguente. Primo gatto: "Sono viola"; secondo gatto: "Almeno 3 di noi sono viola", terzo gatto: "Il primo gatto è nero", quarto gatto: "Almeno 3 di noi sono neri", quinto gatto: "Siamo tutti neri". Quanti dei 5 gatti sono viola?
(A) nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

20) Valeria deve scegliere la combinazione della sua cassaforte, che deve essere un numero di cinque cifre, tutte diverse da zero, divisibile per tre, e tale che delle prime quattro cifre (da sinistra) due siano pari e due dispari. Quante possibilità ha?
(A) $2^5 \cdot 5^2$, **(B)** $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, **(C)** $2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2$, **(D)** $5^2 \cdot 3^4$, **(E)** $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$.

21) All'Università delle Favole, dove gli studenti sono infiniti e gli sbadigli molto contagiosi, ogni volta che uno studente sbadiglia altri 2 studenti sbadigliano dopo 5 secondi (chi ha già sbadigliato non lo fa più). Ieri la Bella Addormentata (una studentessa) era lì e, essendo molto stanca, ha sbadigliato per prima! In quanti (inclusa la Bella Addormentata) avevano sbadigliato dopo 57 secondi?
(A) 2047, **(B)** 3024, **(C)** 3625, **(D)** 4095, **(E)** 8192.

22) Mago Merlino ha 7 palline bianche e 7 nere, e può fare due tipi di incantesimi: il primo fa sparire 3 palline nere e ne fa comparire 2 bianche (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 3 palline nere); il secondo fa sparire 4 palline bianche e ne fa comparire 9 nere (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 4 palline bianche). Dopo aver lanciato varie volte questi incantesimi è possibile che si trovi con...
(A) 2 palline bianche e 15 nere, **(B)** 4 palline bianche e 14 nere, **(C)** 3 palline bianche e 11 nere, **(D)** 7 palline bianche e 13 nere, **(E)** 10 palline bianche e 10 nere.

23) Nella figura a fianco, AC misura 2 cm, B è il punto medio di AC e i triangoli ABD e BCE sono equilateri. Se P e Q sono i centri di ABD e BCE rispettivamente, quanto misura il raggio della circonferenza passante per P, Q e B?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm, **(B)** $\frac{1}{2}$ cm, **(C)** 1 cm, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm,
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



24) Un cono circolare retto ha volume $1\,\mathrm{m}^3$. Si taglia il cono parallelamente alla base, a una distanza dal vertice pari a un quarto dell'altezza del cono. Si ottiene così un nuovo cono; qual è il suo volume?
(A) $\frac{1}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(B)** $\frac{3}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(C)** $\frac{27}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(D)** $\frac{48}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(E)** $\frac{63}{64}\,\mathrm{m}^3$.

25) In una squadra ci sono 11 giocatori e 11 maglie numerate da 1 a 11. I giocatori entrano nello spogliatoio uno alla volta, in ordine casuale. Ciascuno, appena arriva, sceglie una maglia a caso, tranne Danilo che preferisce la maglia numero 8 e, se è disponibile, sceglie quella. Qual è la probabilità che Danilo riesca ad ottenere il suo numero di maglia preferito?
(A) $\frac{4}{9}$, **(B)** $\frac{5}{11}$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{6}{11}$, **(E)** $\frac{5}{9}$.